



SAFRAN



31/03/2021

Suivi expérimental et numérique d'essais de fluage sur éprouvettes en superalliage monocristallin

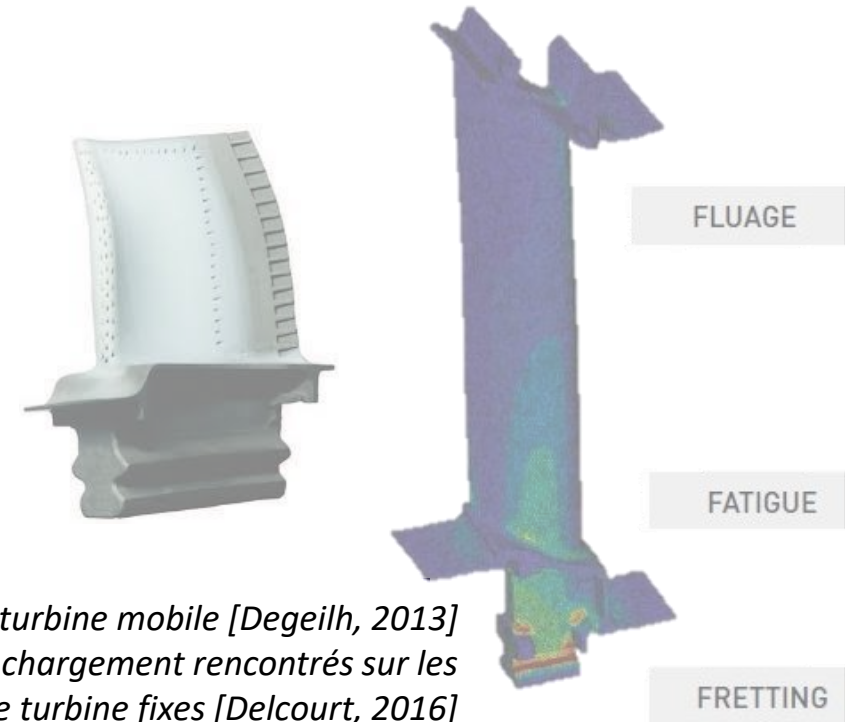
MESBAH Daria

Tuteurs industriels: REMACHA Clément, CARIOU Romain

Tuteurs académiques: RYCKELYNCK David, KERFRIDEN Pierre et AUBLET Axel

Plan de la présentation

- Contexte industriel
- Synthèse bibliographique
- Résultats
- Prochaines étapes



(Gauche) Aube de turbine mobile [Degeilh, 2013]
(Droite) Modes de chargement rencontrés sur les aubes de turbine fixes [Delcourt, 2016]

Plan de la présentation

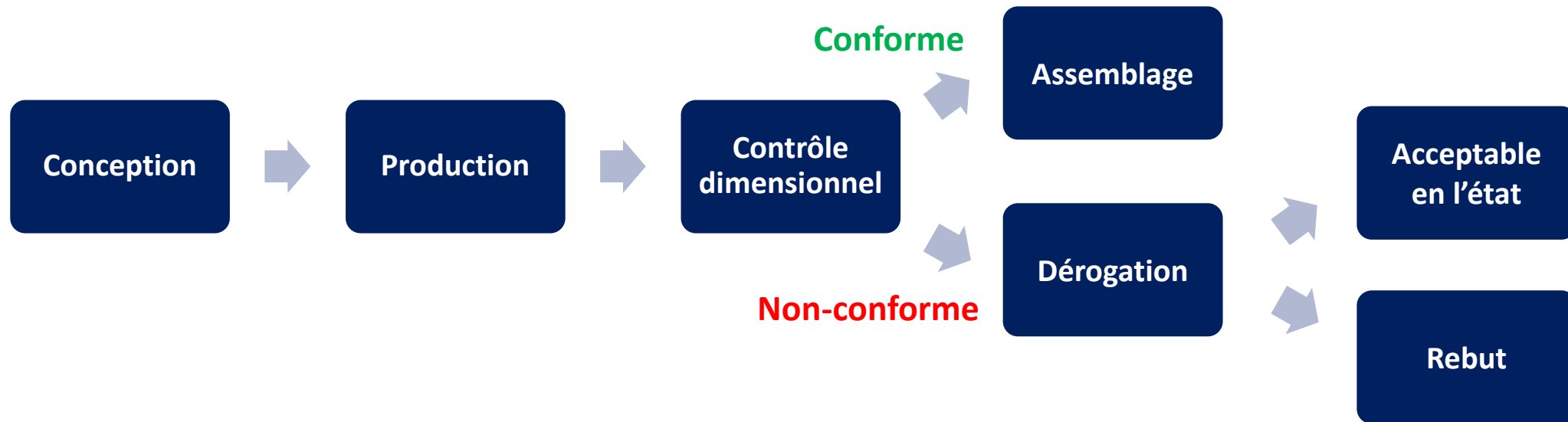
- Contexte industriel
- Synthèse bibliographique
- Résultats
- Prochaines étapes



Site de Safran PFX, plateforme de recherche sur les aubes du futur (Gennevilliers) [Safran, 2019]

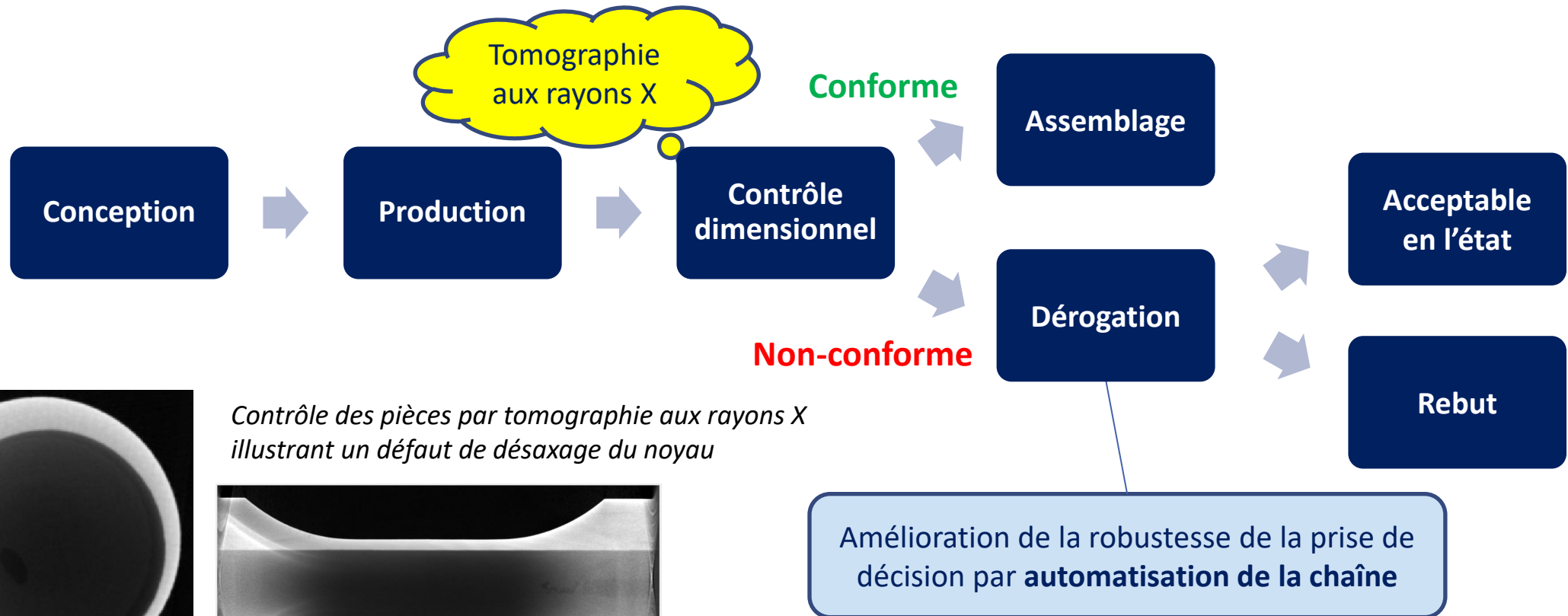
Safran PFX (Projet de Fonderie eXpérimentale)

- Plateforme de recherche sur les **aubes de turbine** avancées des moteurs Safran Aircraft Engines et Helicopter Engines

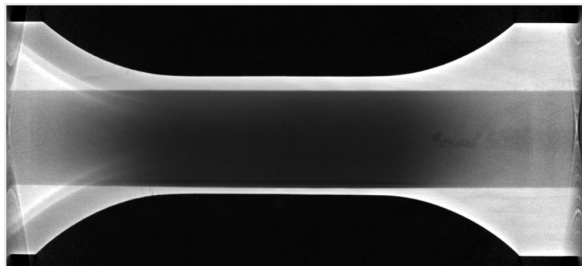
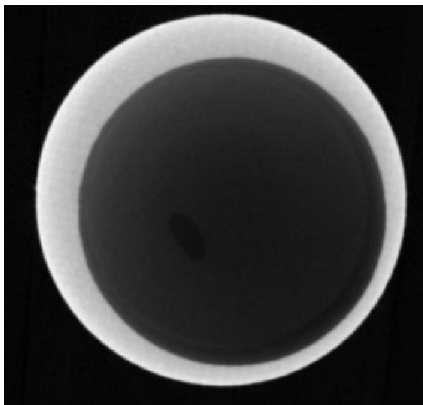


Safran PFX (Projet de Fonderie eXpérimentale)

➤ Plateforme de recherche sur les **aubes de turbine** avancées des moteurs Safran Aircraft Engines et Helicopter Engines

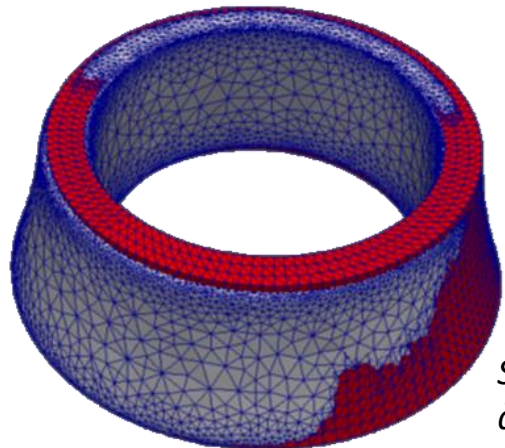


Contrôle des pièces par tomographie aux rayons X illustrant un défaut de désaxage du noyau



Amélioration de la robustesse de la prise de décision par **automatisation de la chaîne**

Automatisation de la sanction de dérogation des pièces de fonderie en superalliage monocristallin

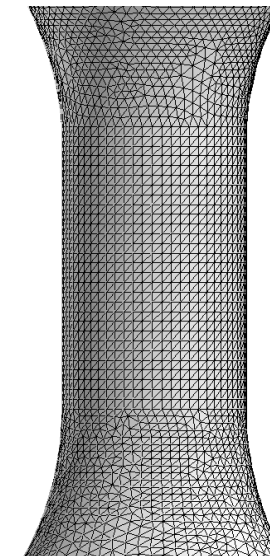


Superposition des maillages générés à partir de la tomographie aux rayons X (bleu) et de la CAO (rouge)

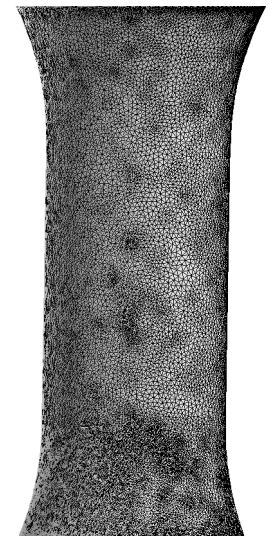
Mesurer d'écarts **géométriques** entre:

- la pièce de référence (maillage CAO)
- une série de pièces réelles (maillages de tomographie)

Déformation de maillages

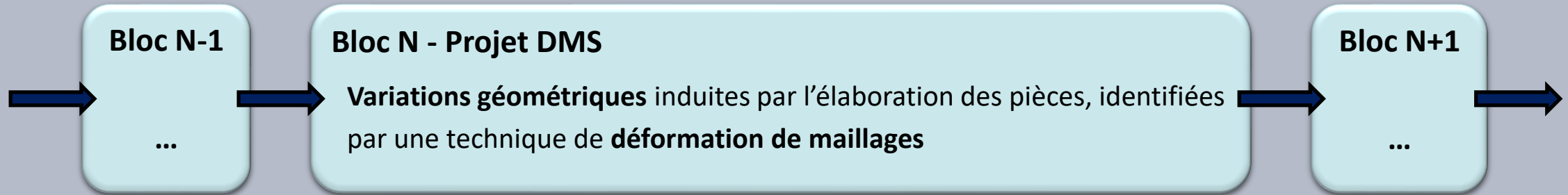


Maillage CAO



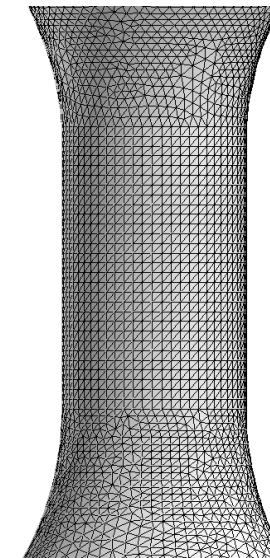
Maillage Tomo

Automatisation de la sanction de dérogation des pièces de fonderie en superalliage monocristallin

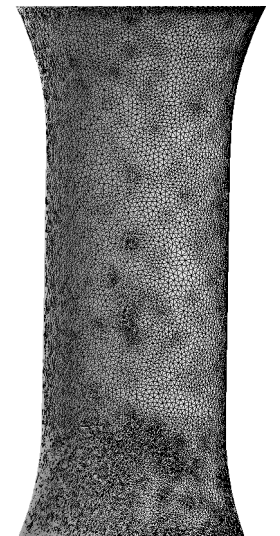


Objectifs :

- Implémenter l'algorithme de **déformation de maillages** entre *CAO* et *Tomo*
- Identifier et catégoriser des **types de variations géométriques**
- Illustrer l'impact des variations géométriques sur le calcul de **durée de vie**



Maillage CAO

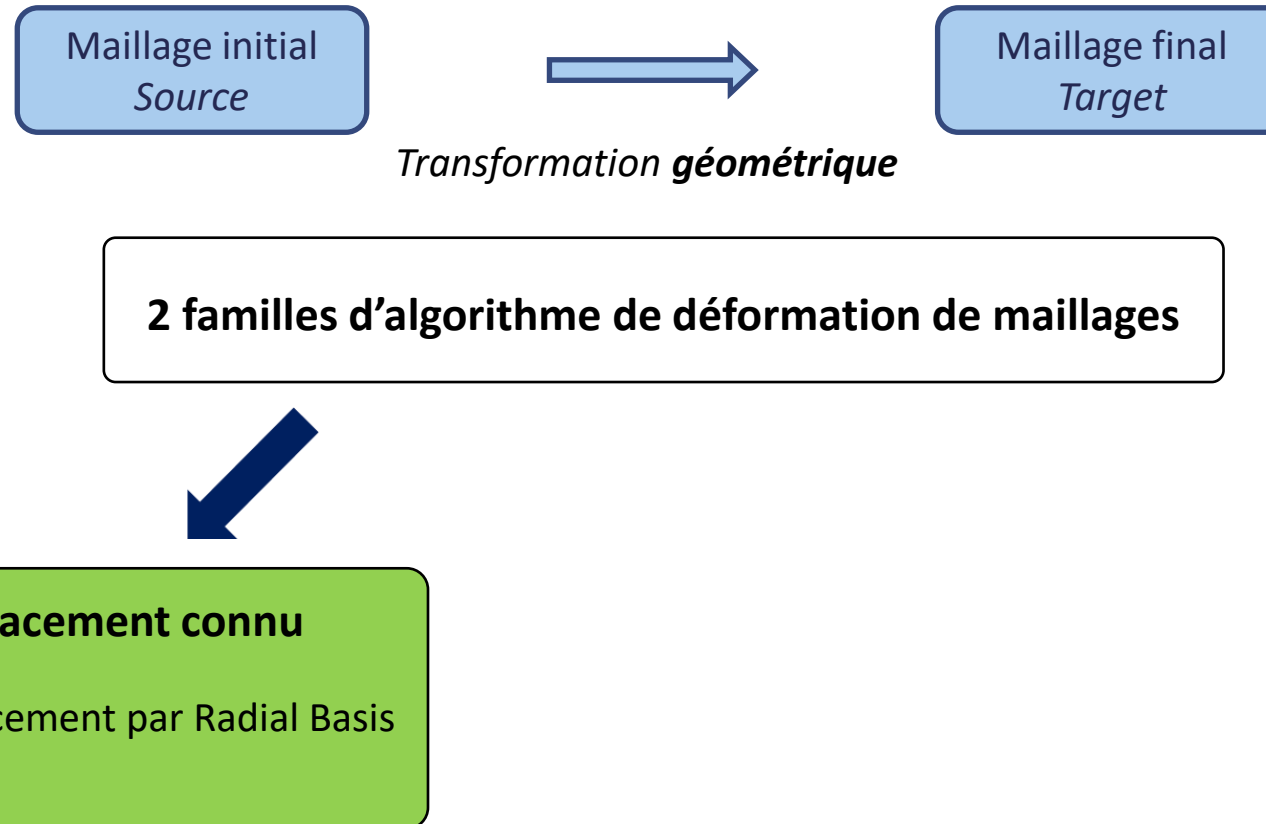


Maillage Tomo

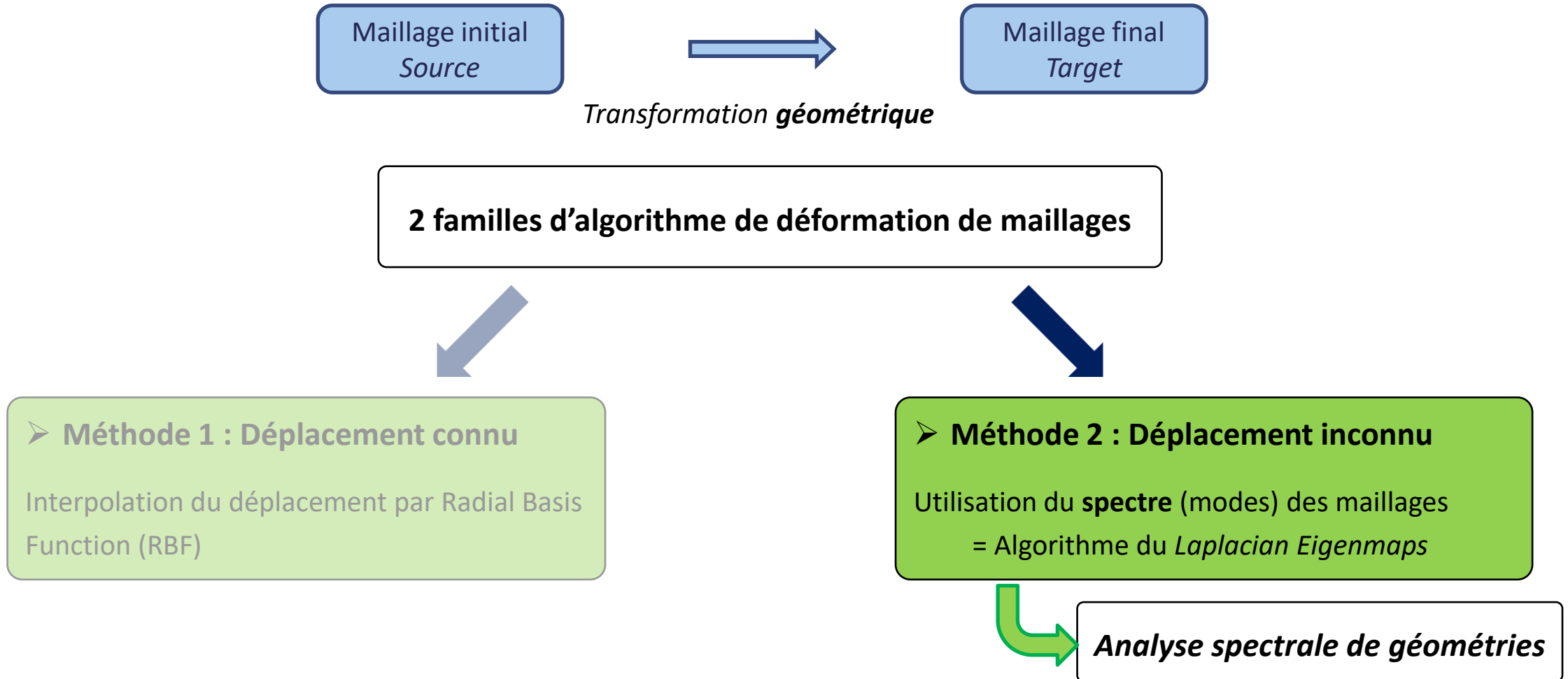
Plan de la présentation

-  *Contexte industriel*
-  *Synthèse bibliographique*
-  *Résultats*
-  *Prochaines étapes*

Déformation de maillages – Algorithmes



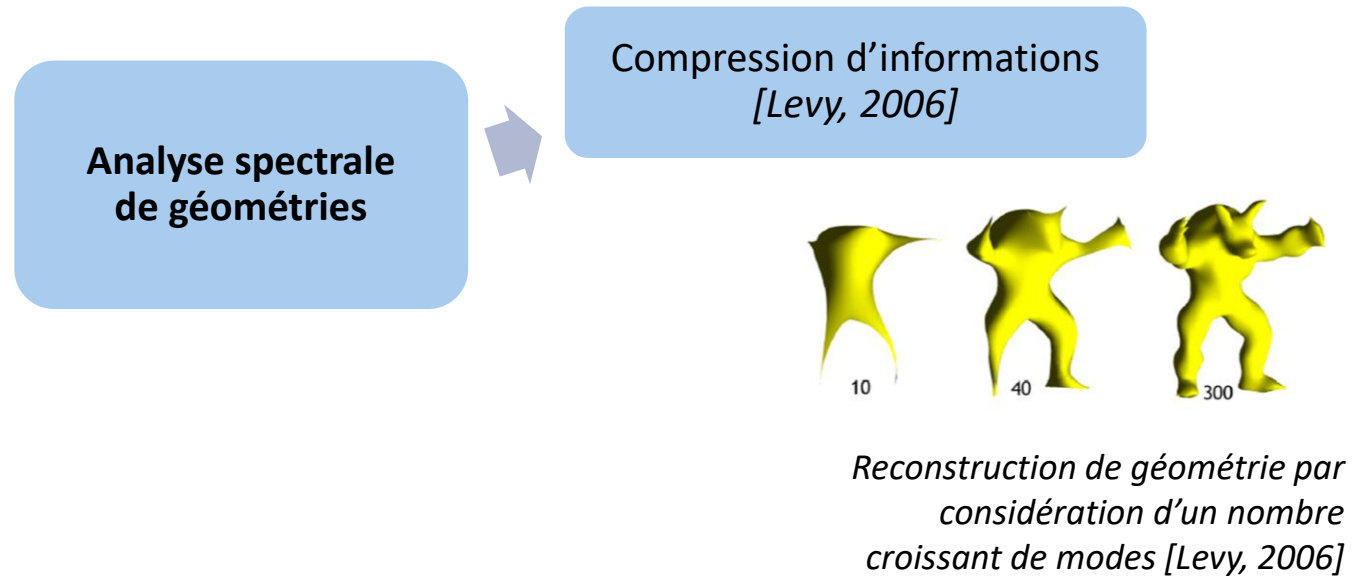
Déformation de maillages – Algorithmes



Déformation de maillages – Analyse spectrale de géométries « Shape-DNA » [Reuter, 2006]

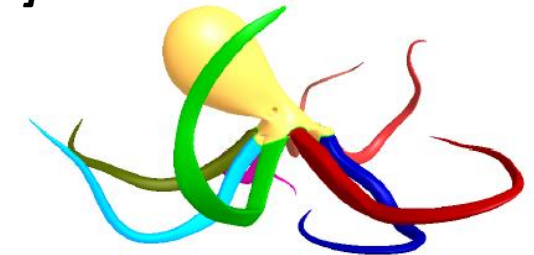
**Analyse spectrale
de géométries**

Déformation de maillages – Analyse spectrale de géométries « Shape-DNA » [Reuter, 2006]



Déformation de maillages – Analyse spectrale de géométries « Shape-DNA » [Reuter, 2006]

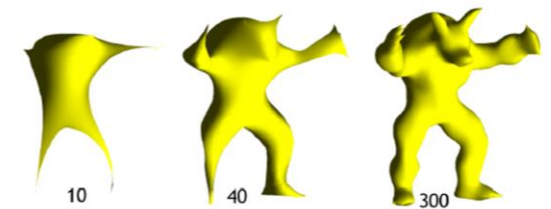
Segmentation de géométrie [Reuter, 2013]



Utilisation de modes pour segmenter une géométrie [Reuter, 2013]

Analyse spectrale de géométries

Compression d'informations [Levy, 2006]



Reconstruction de géométrie par considération d'un nombre croissant de modes [Levy, 2006]

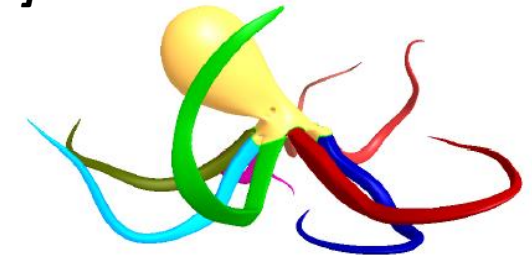
Déformation de maillages – Analyse spectrale de géométries « Shape-DNA » [Reuter, 2006]

Reconnaissance de formes par projection de modes (Eigenmaps) [Zhang et al., 2010]



Reconnaissance de formes [Zhang et al., 2010]

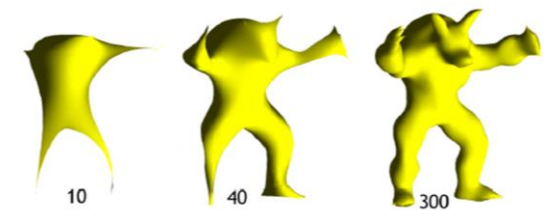
Segmentation de géométrie [Reuter, 2013]



Utilisation de modes pour segmenter une géométrie [Reuter, 2013]

Compression d'informations [Levy, 2006]

Analyse spectrale de géométries



Reconstruction de géométrie par considération d'un nombre croissant de modes [Levy, 2006]

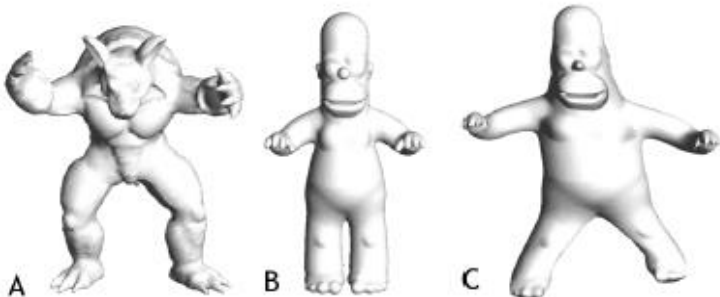
Déformation de maillages – Analyse spectrale de géométries « Shape-DNA » [Reuter, 2006]

Reconnaissance de formes par projection de modes (Eigenmaps) [Zhang et al., 2010]



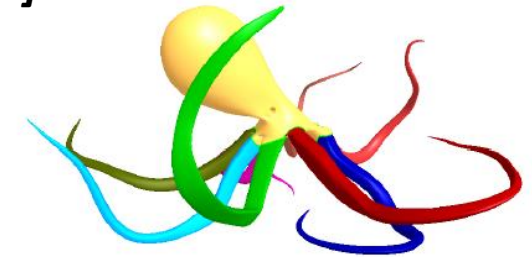
Reconnaissance de formes [Zhang et al., 2010]

Transfert de pose entre par combinaison des modes d'une géométrie (A) Source et (B) Target et (C) la déformée [Levy, 2006]



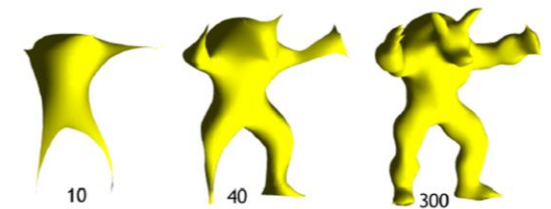
Transfert de pose [Levy, 2006]

Segmentation de géométrie [Reuter, 2013]



Utilisation de modes pour segmenter une géométrie [Reuter, 2013]

Compression d'informations [Levy, 2006]



Reconstruction de géométrie par considération d'un nombre croissant de modes [Levy, 2006]

Analyse spectrale de géométries

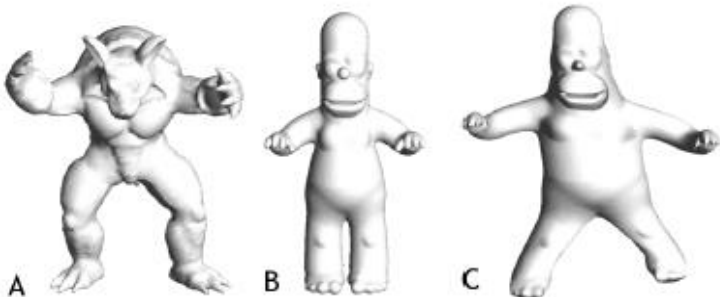
Déformation de maillages – Analyse spectrale de géométries « Shape-DNA » [Reuter, 2006]

Reconnaissance de formes par projection de modes (Eigenmaps) [Zhang et al., 2010]



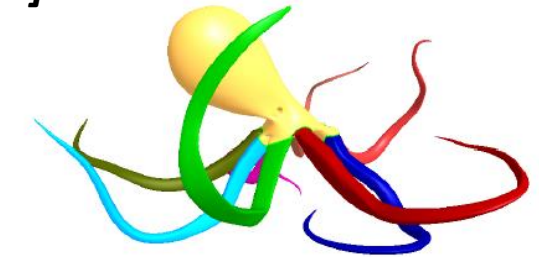
Reconnaissance de formes [Zhang et al., 2010]

Transfert de pose entre par combinaison des modes d'une géométrie (A) Source et (B) Target et (C) la déformée [Levy, 2006]



Transfert de pose [Levy, 2006]

Segmentation de géométrie [Reuter, 2013]

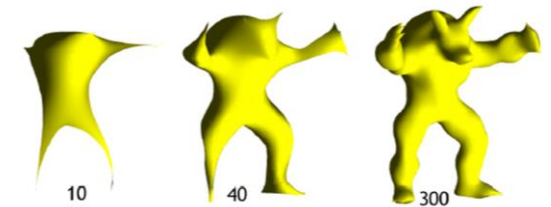


Utilisation de modes pour segmenter une géométrie [Reuter, 2013]

Compression d'informations [Levy, 2006]

Analyse spectrale de géométries

Déformation de maillages

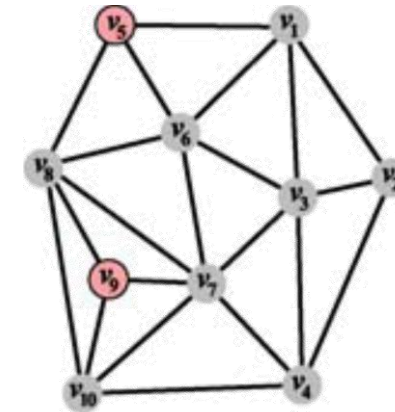
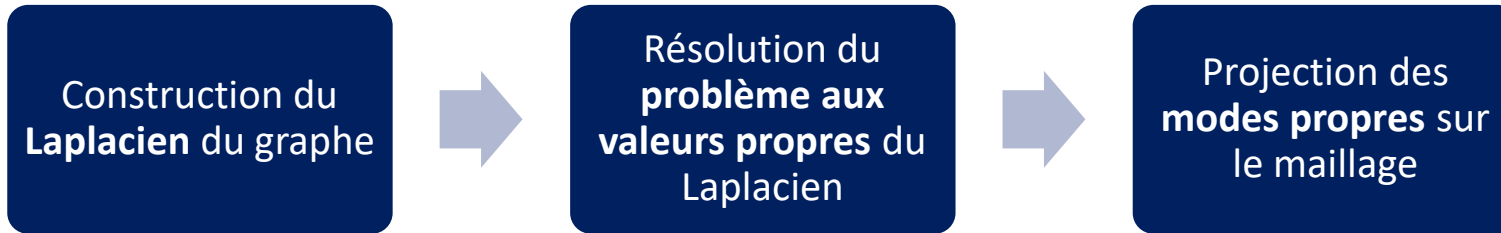


Reconstruction de géométrie par considération d'un nombre croissant de modes [Levy, 2006]

Synthèse bibliographique

Déformation de maillages – Méthode à déplacement inconnu

- Utilisation du **spectre** (modes) des maillages

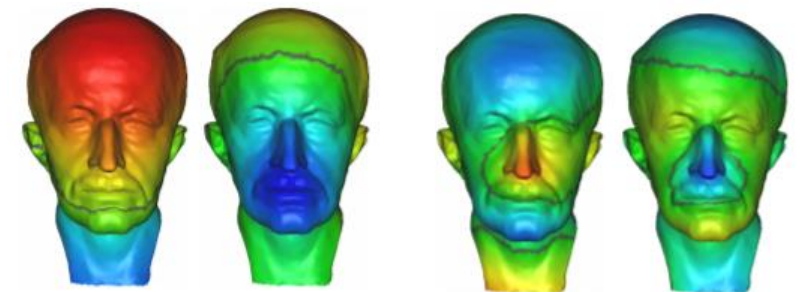


4	-1	-1	-1	-1					
-1	3	-1	-1						
-1	-1	5	-1	-1	-1				
	-1	-1	4		-1				-1
-1				3	-1	-1			
-1	-1				4	-1	-1		
		-1	-1		-1	6	-1	-1	-1
							-1	-1	3
									-1
			-1				-1	-1	4

Construction du **Laplacien** du graphe par pondération uniforme [Shontz et al., 2011]

- **Laplacien** (Représentation matricielle du graphe du maillage) : **Connectivité**
 - **Problème aux valeurs propres** : Trouver les $(\lambda_i, \varphi_i)_{i=1 \rightarrow n}$ tel que : $L\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$
 - Projection de chaque vecteur propre, φ_i , sur le maillage:
- $$\underbrace{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m}_{\text{Information globale}} \quad \underbrace{(\varphi_{11}, \varphi_{12}), \dots, \varphi_n}_{\text{Information locale}}$$

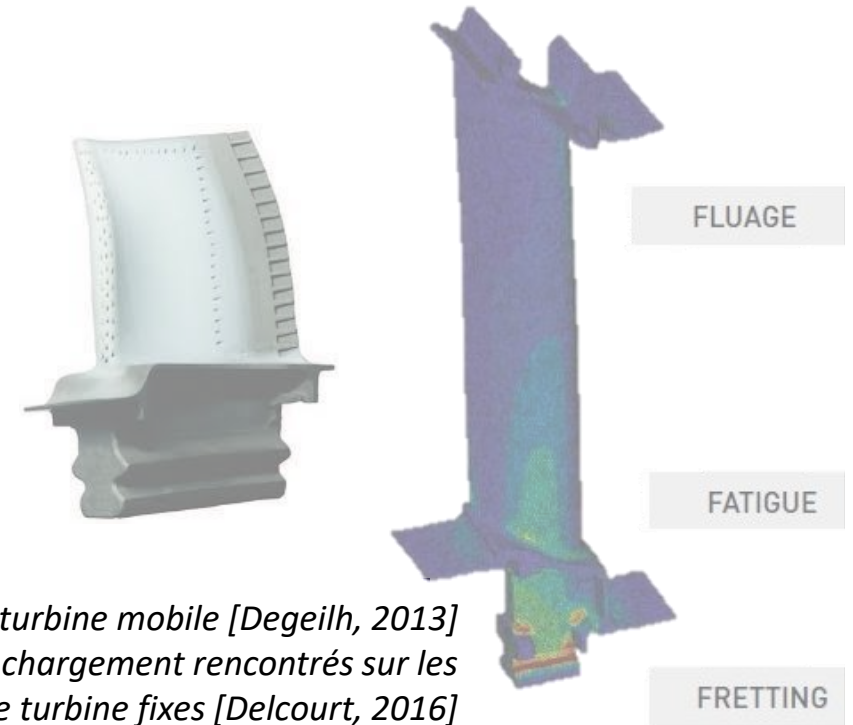
➔ $(\varphi_i)_{i=1 \rightarrow n}$



Modes 1 et 2 Modes 11 et 12
Projection de modes sur le maillage (**Eigenmaps**)
[Zhang et al., 2010]

Plan de la présentation

- Contexte industriel
- Synthèse bibliographique
- Résultats
- Prochaines étapes



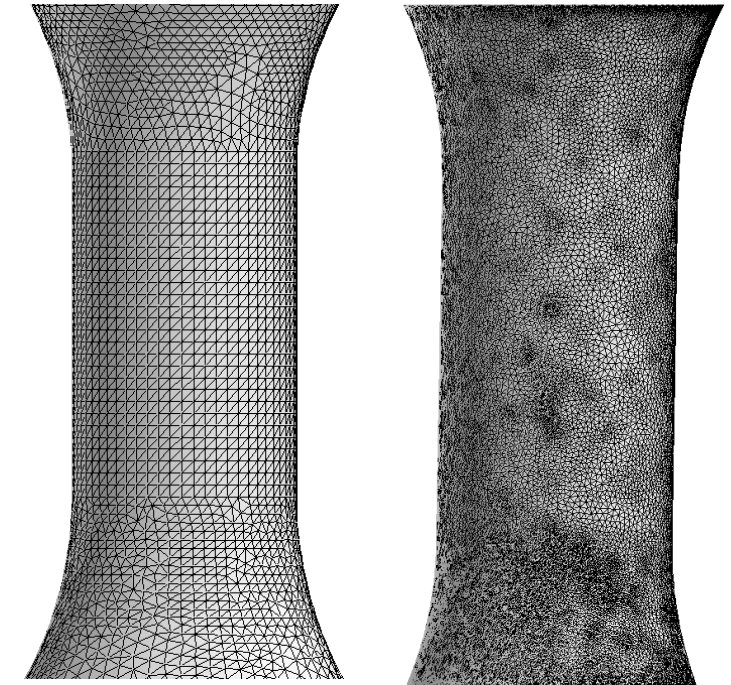
(Gauche) Aube de turbine mobile [Degeilh, 2013]
(Droite) Modes de chargement rencontrés sur les aubes de turbine fixes [Delcourt, 2016]

Etude des variations géométriques induites par la fabrication identifiées par déformation de maillages

➤ **Méthode 2 : Déplacement inconnu – Algorithme du *Laplacian Eigenmaps***

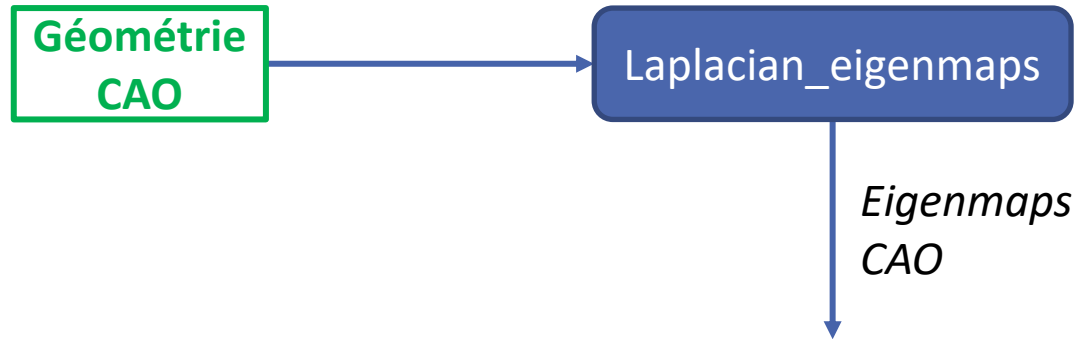
Maillage Tomo \approx Combinaison linéaire de modes géométriques du maillage CAO

1. *Calcul des modes géométriques du maillage CAO (**Eigenmaps**)*
2. *Sélection du nombre de modes, n , représentatifs de la géométrie CAO*
3. *Projection du maillage Tomo dans cet **espace modal***
4. *Identification des modes **activés** par la fabrication*



**Maillage CAO
Source**

**Maillage Tomo
Target**



1. Calcul des modes géométriques du maillage CAO (Eigenmaps)



Construction du
Laplacien du graphe



Résolution du
**problème aux
valeurs propres** du
Laplacien

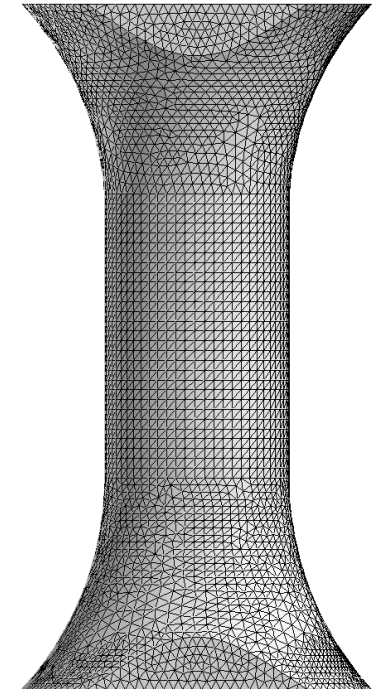


Projection des
modes propres sur
le maillage

$$L$$

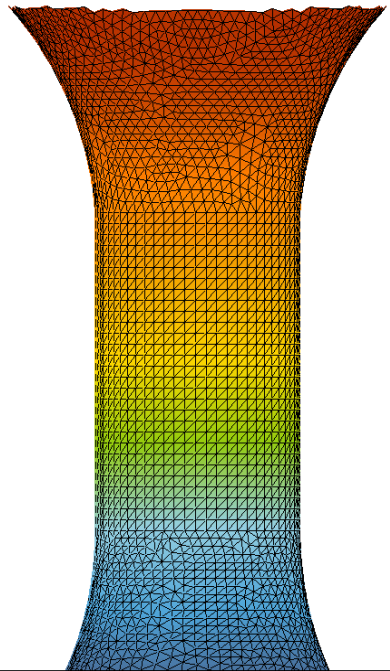
$$L\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$$

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} \phi_1^i \\ \vdots \\ \phi_{5576}^i \end{pmatrix}$$

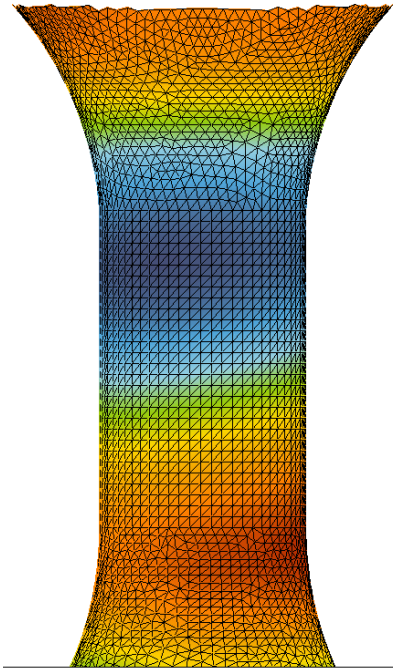


Maillage CAO
5576 noeuds

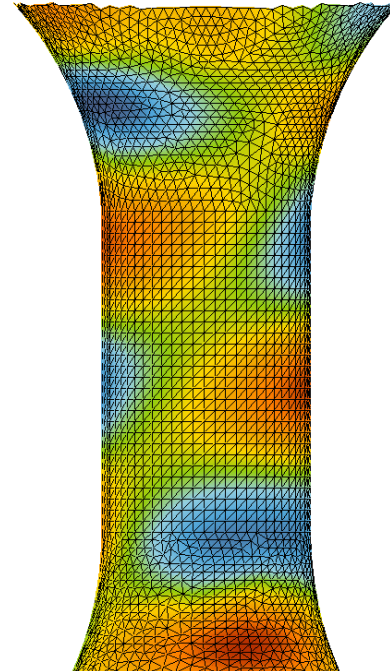
1. Calcul des modes géométriques du maillage CAO (Eigenmaps)



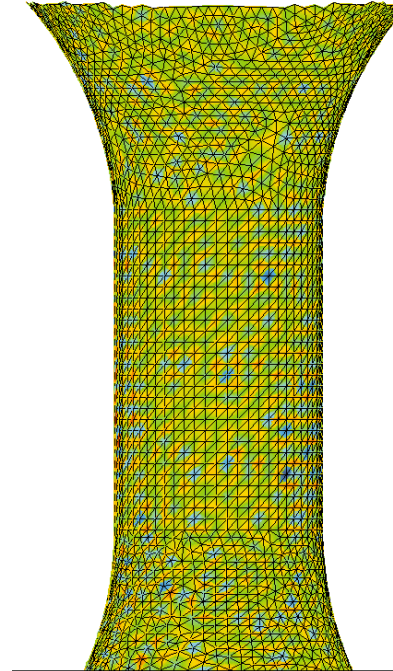
Mode 2



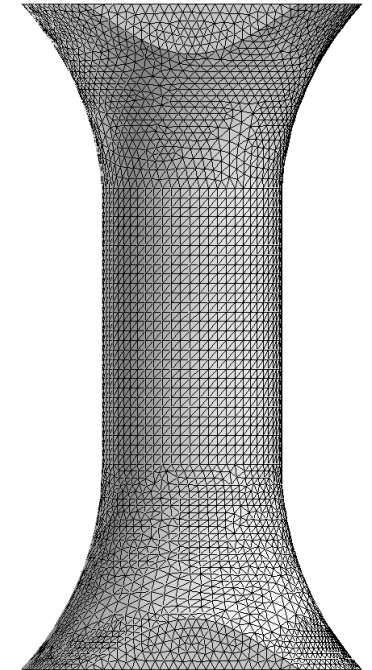
Mode 8



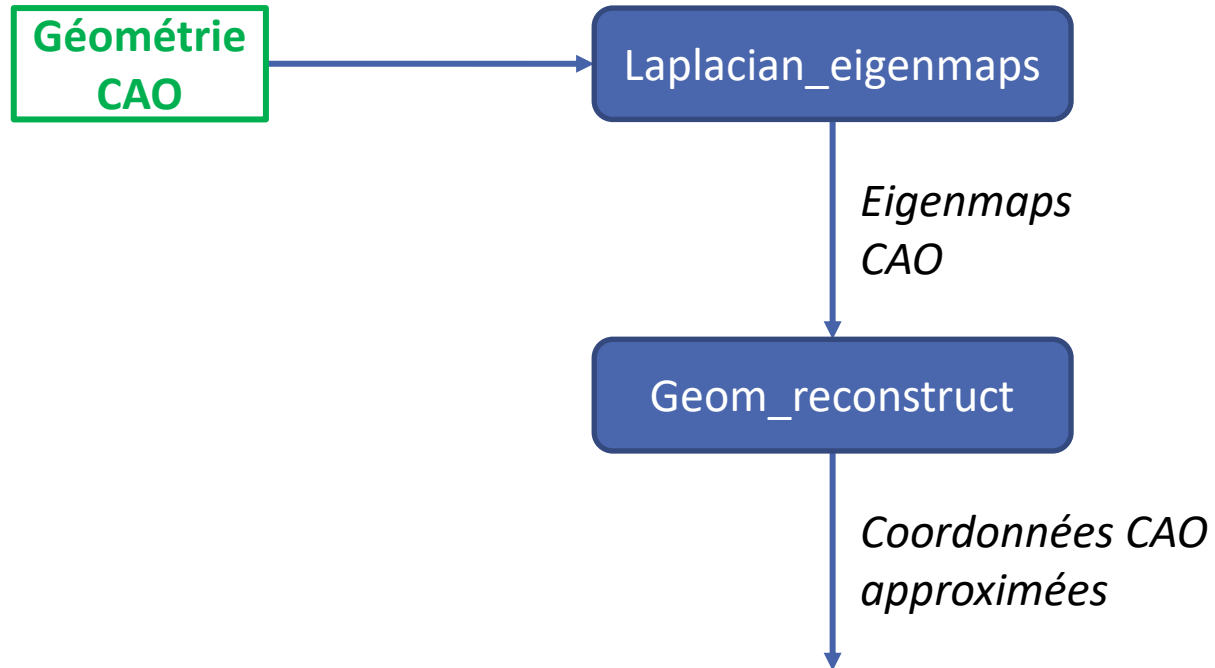
Mode 37



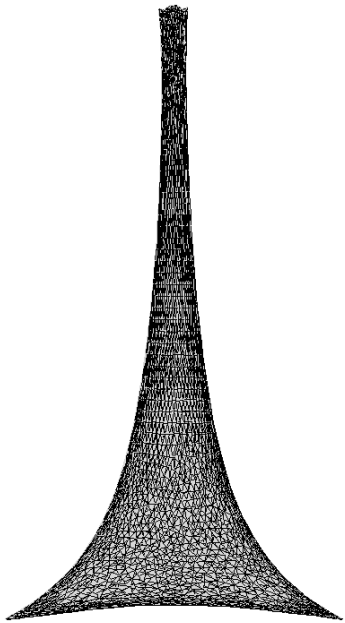
Mode 3700



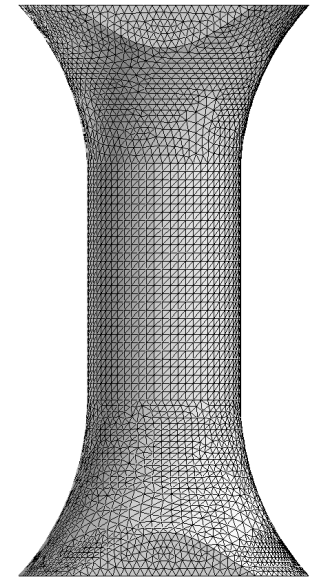
Maillage CAO
5576 noeuds



2. Sélection du nombre de modes, n , représentatifs de la géométrie CAO

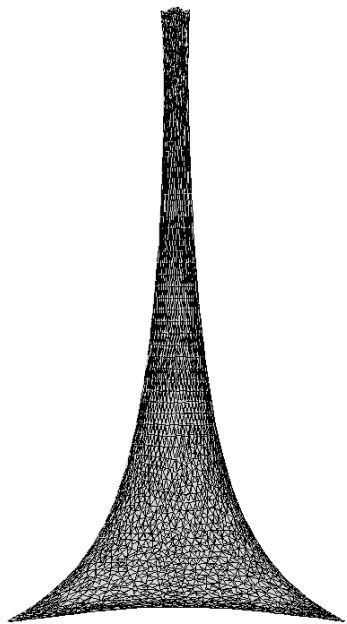
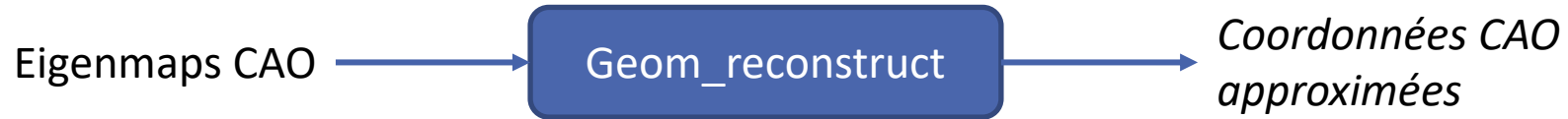


4 modes

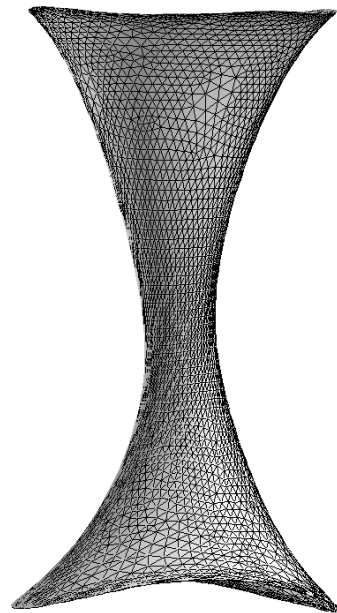


Maillage CAO
5576 noeuds

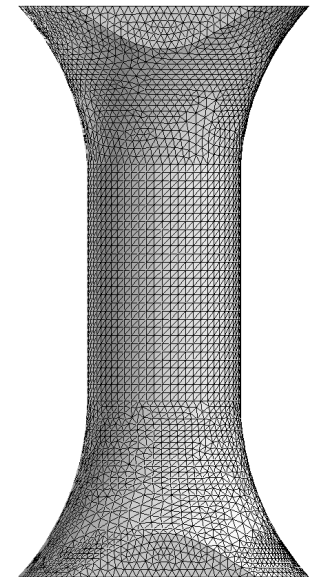
2. Sélection du nombre de modes, n , représentatifs de la géométrie CAO



4 modes

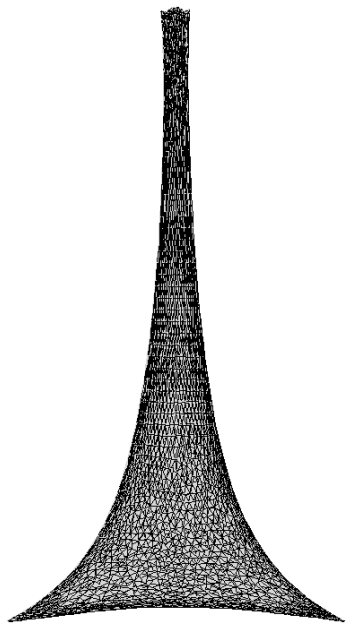
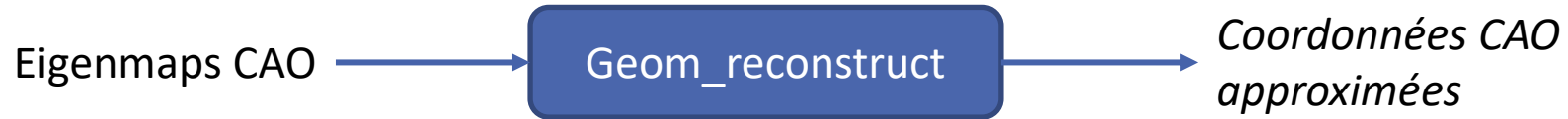


8 modes

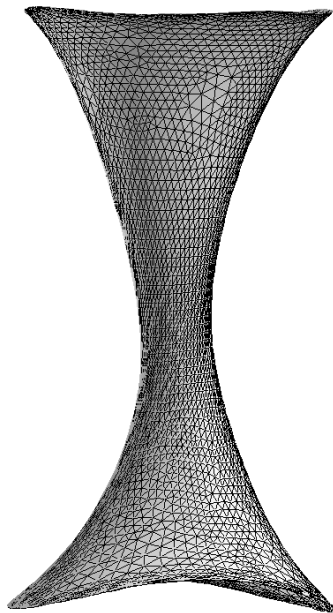


Maillage CAO
5576 noeuds

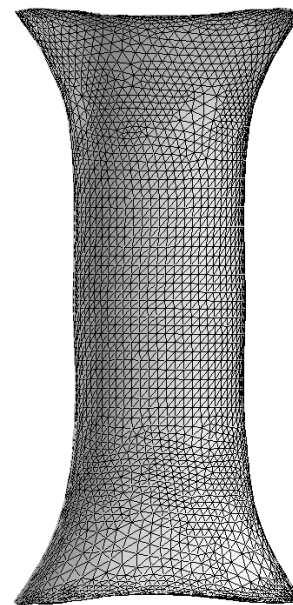
2. Sélection du nombre de modes, n , représentatifs de la géométrie CAO



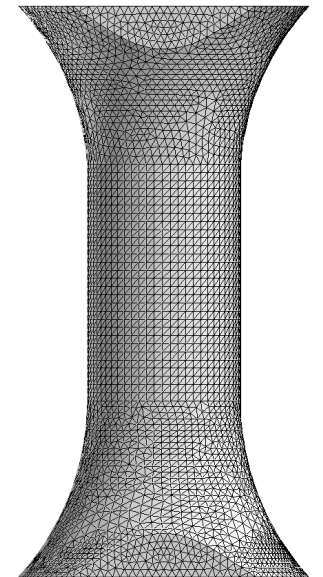
4 modes



8 modes

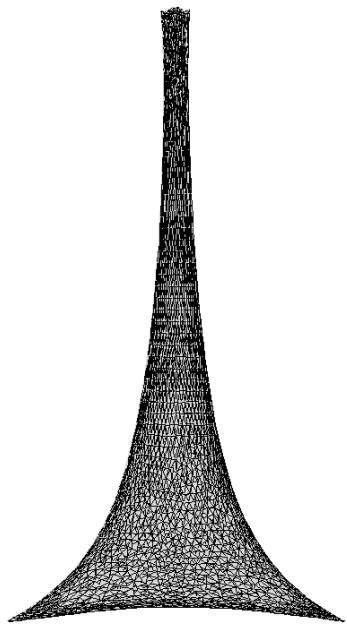
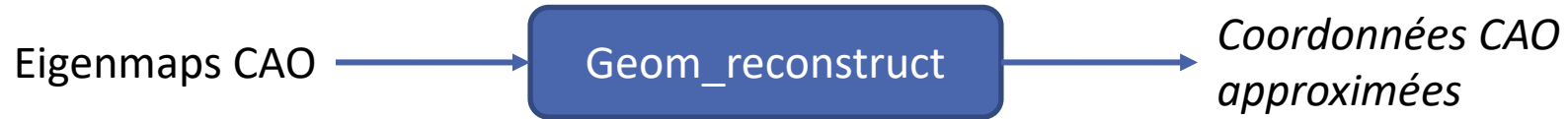


10 modes

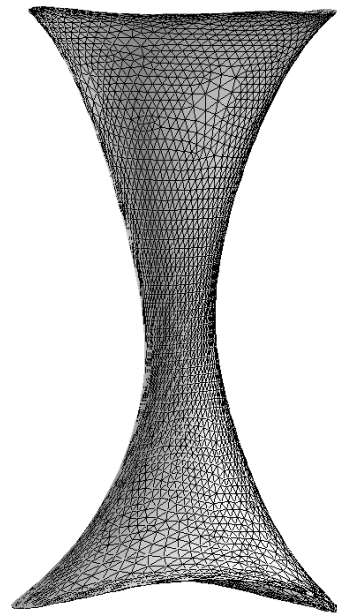


Maillage CAO
5576 noeuds

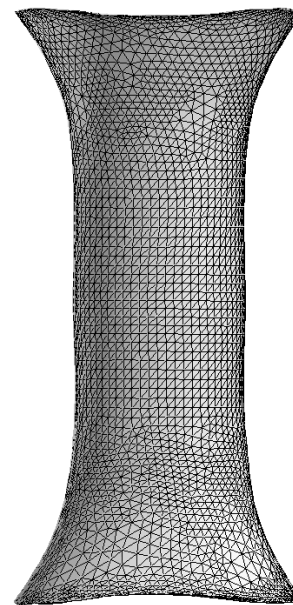
2. Sélection du nombre de modes, n , représentatifs de la géométrie CAO



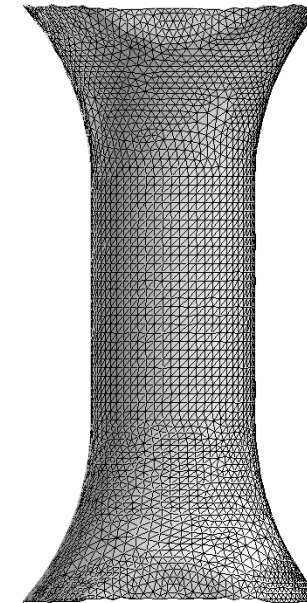
4 modes



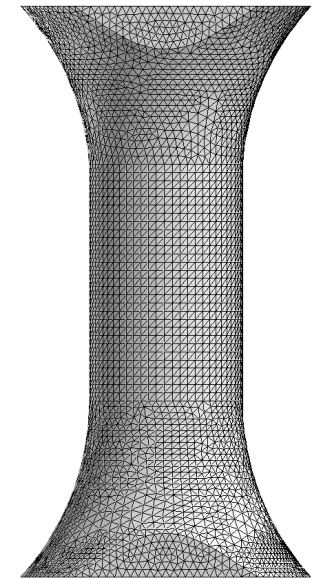
8 modes



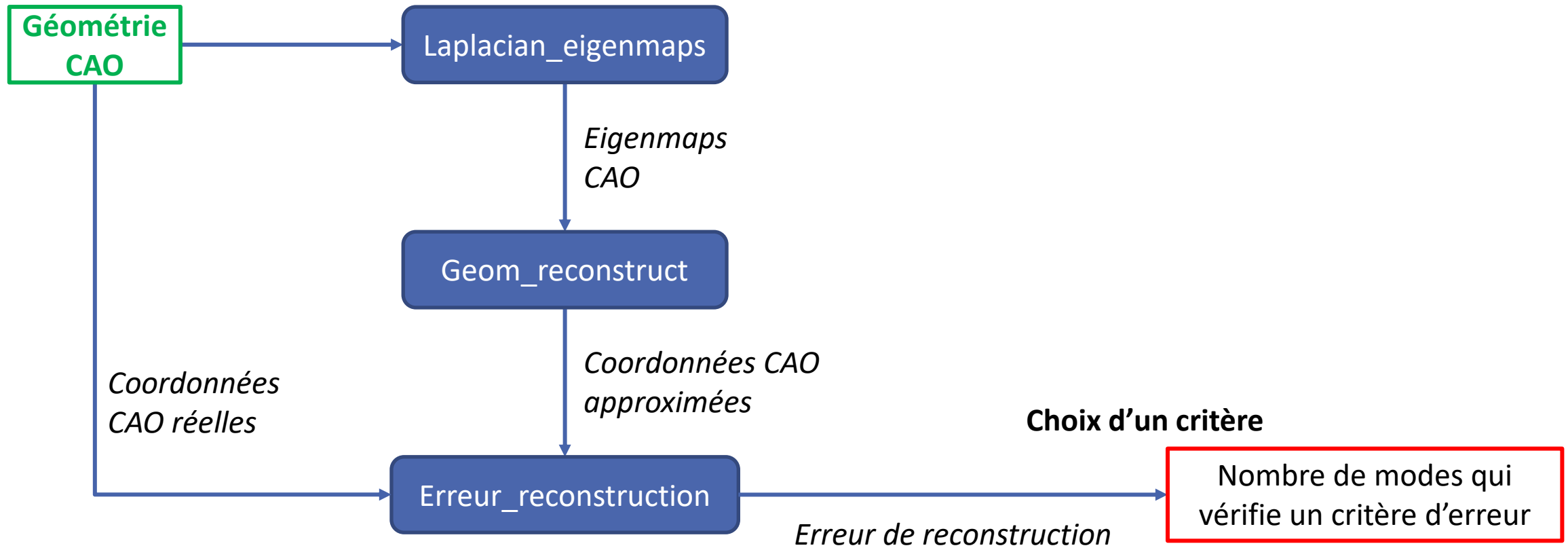
10 modes



1000 modes



Maillage CAO
5576 noeuds

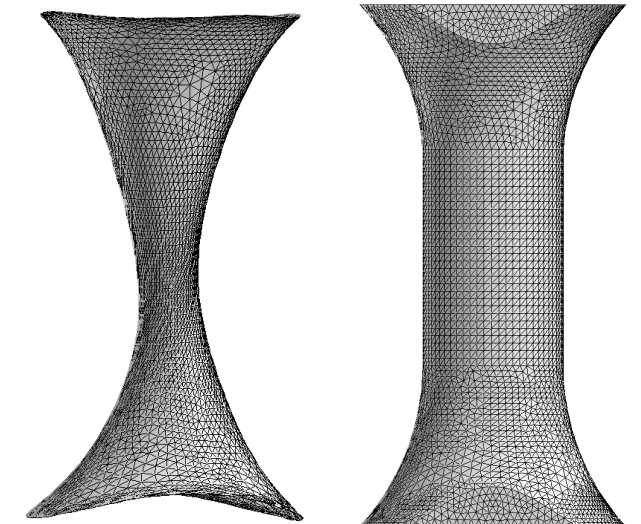
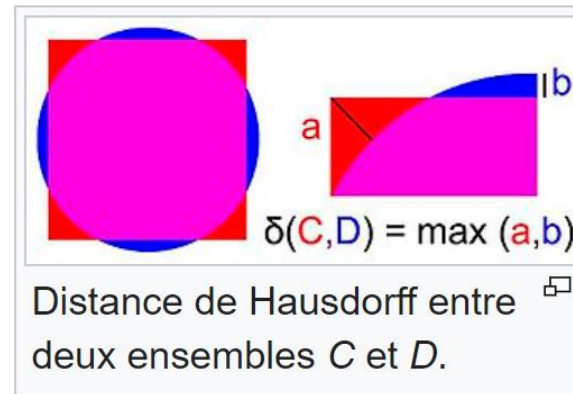


2. Sélection du nombre de modes, n , représentatif de la géométrie CAO



- **Erreur** induite par différence de coordonnées entre position réelle et approximée
- Critère de convergence : **taille moyenne d'éléments** (0.05 mm)
- Pour chaque mode, **erreur commise** =

Distance	
Moyenne	\tilde{d}
Maximale (Hausdorff)	d_{max}
Maximale statistique	$\tilde{d} + 3 * \sigma$



Reconstruction complète avec n = nombre de noeuds

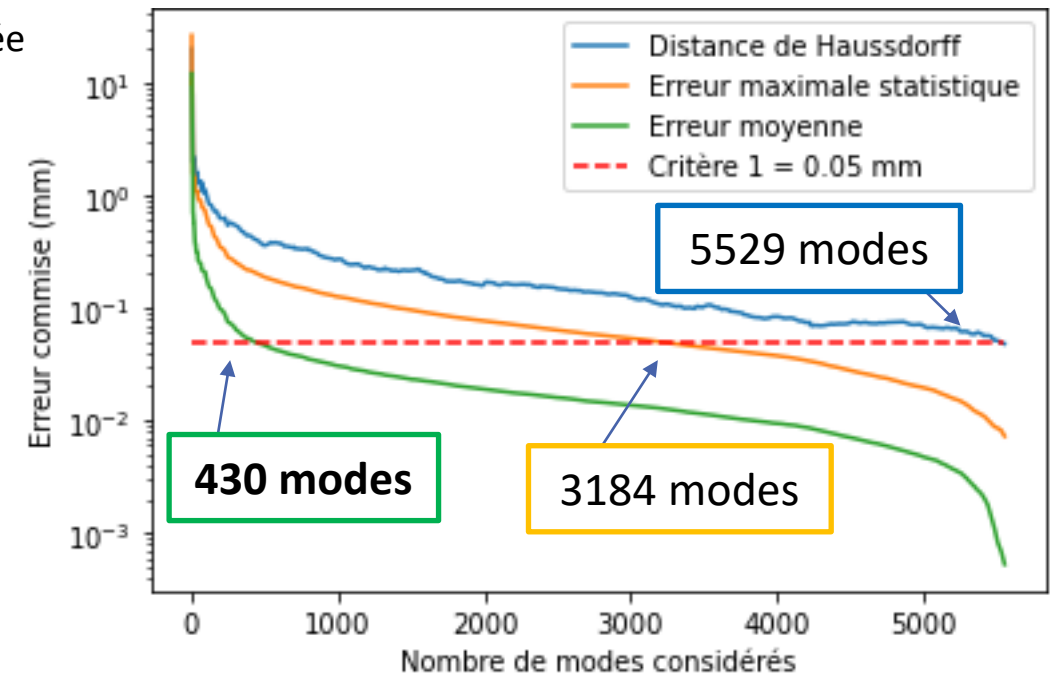
2. Sélection du nombre de modes, n , représentatif de la géométrie CAO



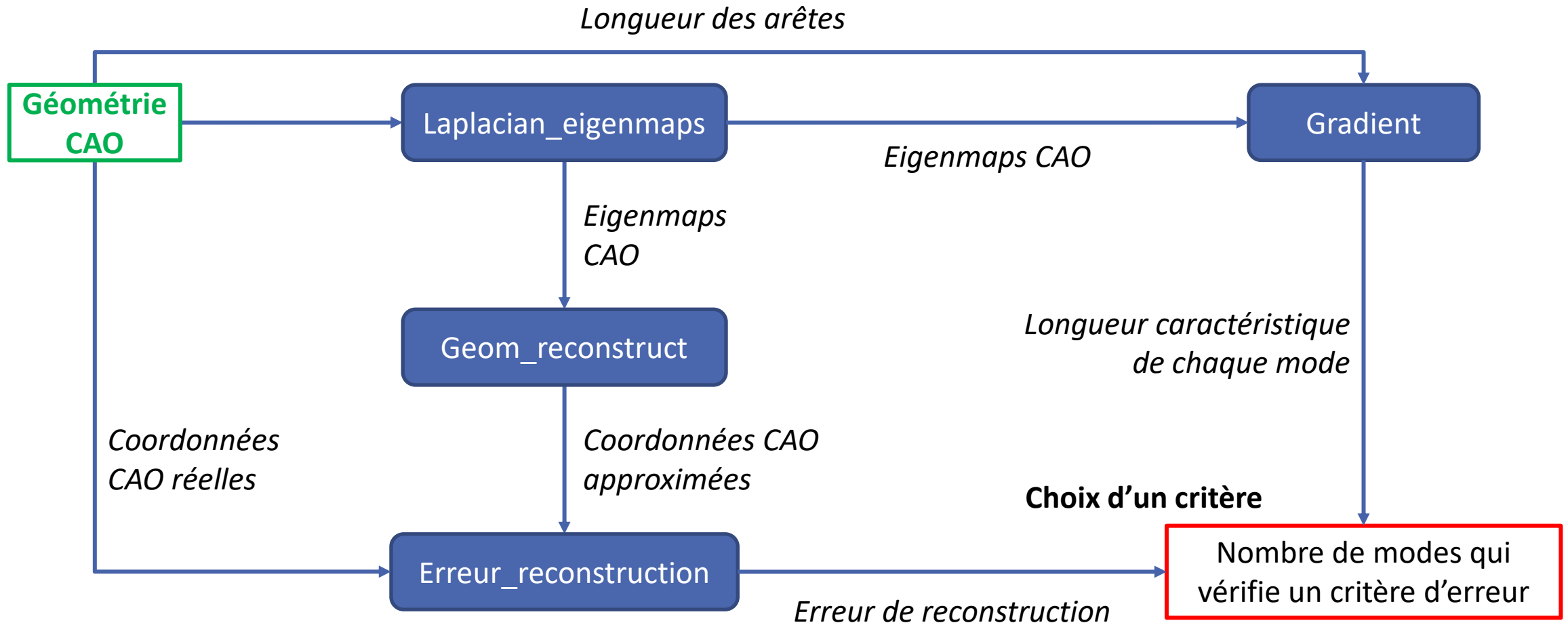
- **Erreur** induite par différence de coordonnées entre position réelle et approximée
- Critère de convergence : **taille moyenne d'éléments** (0.05 mm)
- Pour chaque mode, **erreur commise** =

Distance		Peau externe
Moyenne	\tilde{d}	430
Maximale (Hausdorff)	d_{max}	5529
Maximale statistique	$\tilde{d} + 3 * \sigma$	3184

Reconstruction complète avec n = nombre de noeuds



Erreur commise sur la reconstruction de la **peau extérieure** en fonction du nombre de modes employés



2. Sélection du nombre de modes, n , représentatif de la géométrie CAO

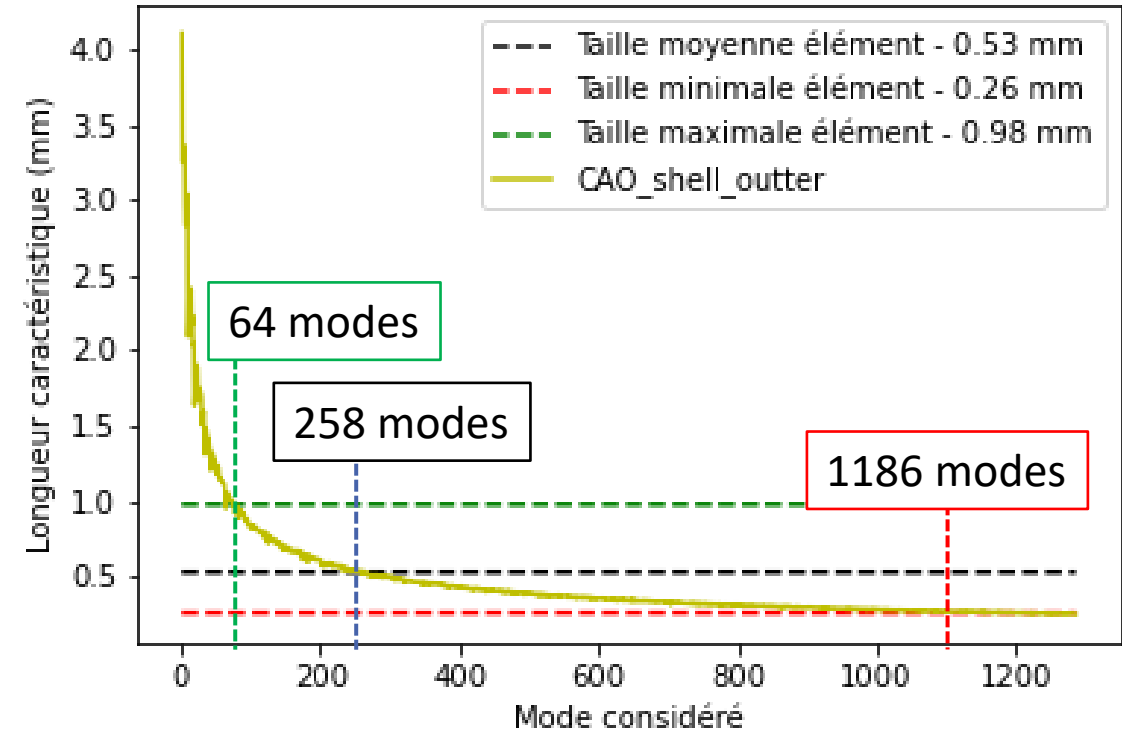


$$G_i^n = \frac{|\phi_i^n - \phi_j^n|}{l_{ij}}$$

- Avec :
 - ϕ_i^n et ϕ_j^n : les coefficients du mode n associés aux nœuds i et j
 - l_{ij} : la longueur de l'arête entre les nœuds i et j

- Longueur caractéristique du mode n :

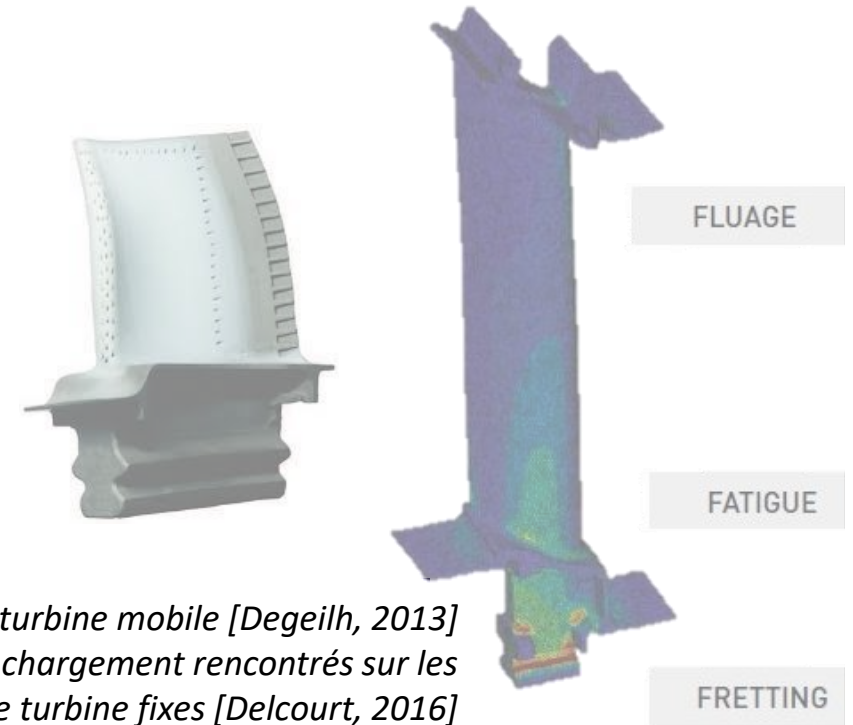
$$l_c^n = \frac{\|\phi^n\|}{\|G^n\|}$$



Evolution de la longueur caractéristique des modes

Plan de la présentation

- Contexte industriel
- Synthèse bibliographique
- Résultats préliminaires
- Prochaines étapes



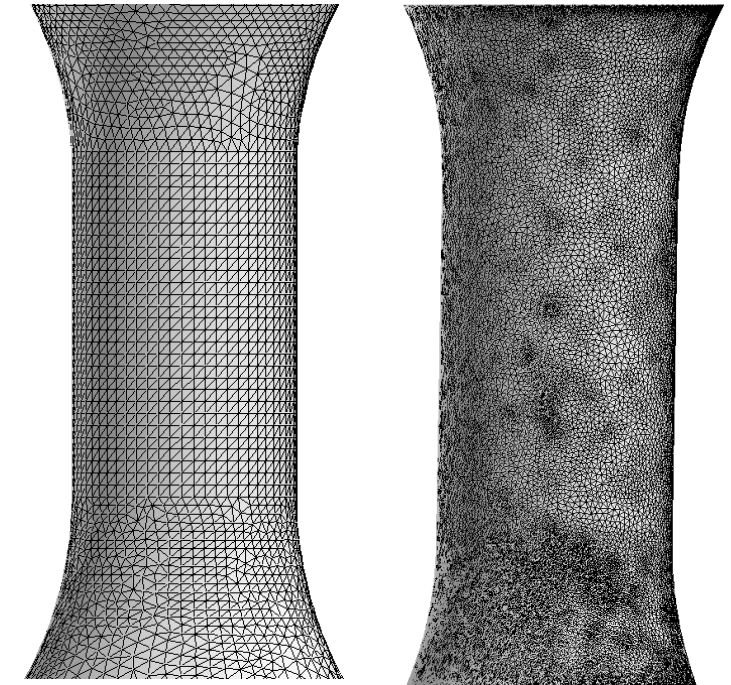
(Gauche) Aube de turbine mobile [Degeilh, 2013]
(Droite) Modes de chargement rencontrés sur les aubes de turbine fixes [Delcourt, 2016]

Options envisagées pour la déformation de maillages

➤ Méthode 2 : Déplacement inconnu – Algorithme du *Laplacian Eigenmaps*

Maillage Tomo \approx Combinaison linéaire de modes géométriques du maillage CAO

- ~~1. Calcul des modes géométriques du maillage CAO (**Eigenmaps**)~~
- Sélection du nombre de modes, n , représentatif de la géométrie CAO
 - **Choix du critère**
- Projection du maillage Tomo dans cet **espace modal**
 - Génération des maillages de tomographie (VG Studio Max)
- Identification des modes **activés** par la fabrication

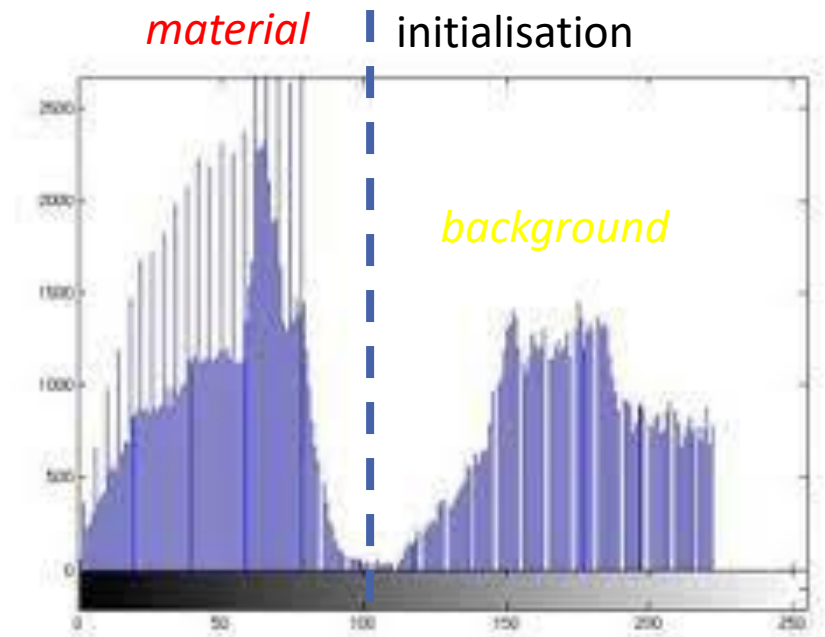
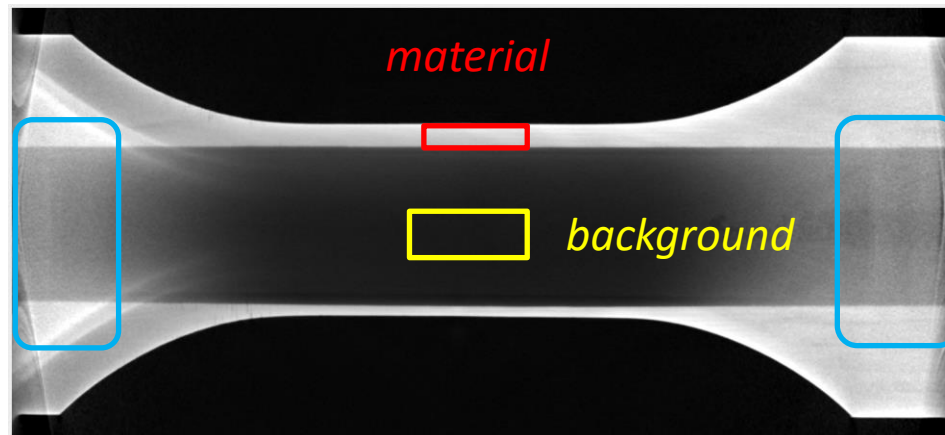
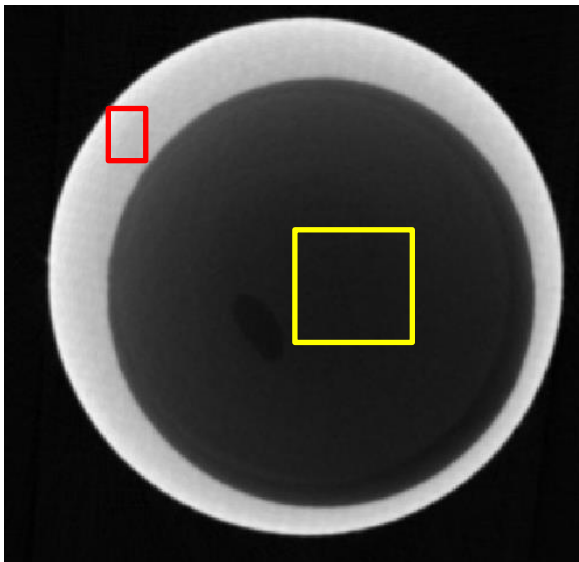


Maillage CAO
Source

Maillage Tomo
Target

Utilisation de VG Studio Max pour la génération de maillages de tomographie

- Reconstruction 3D à partir de projections (2D)
 - Segmentation : procédé d'identification de la frontière entre *BACKGROUND* et *MATERIAL*
 - Génération des maillages des pièces (jumeau numérique)



**MERCI POUR
VOTRE ATTENTION**

[Al-Marzouqi, 2006] Automatic planning of a safe drilling path to be used in cochlear implantation surgery using image registration techniques

[Aublet, 2020] Présentation des travaux de these, Soutenance de 1ère année, A. Aublet, 2020

[Athaniadis et al., 2010] Feature-based 3D morphing based on geometrically constrained sphere mapping optimization, 2010

[Besl and McKay, 1992] A method for registration of 3D shapes. 14(2), 18.

[Caron, 2016] Le développement des superalliages monocristallins à base de nickel, P. Caron, 2016

[Daridon et al., 2011] Changement d'échelles et zoom structural. 7.

[Defay, 2012] Comportement des oxydes dans un procédé de fonderie d'alliages base nickel. Université de Lorraine.

[Degeilh, 2013] Développement expérimental et modélisation d'un essai de fatigue avec gradient thermique de paroi pour application aube de turbine monocristalline. ENS Cachan, R. Degeilh, 2013

[Delcourt, 2016] Matériaux & Procédés pour équipements aéronautiques, O. Delcourt, SafranTech, 2016

[Du et al. , 2015] Probability iterative closest point algorithm for m-D point set registration with noise, Neurocomputing, Volume 157, Pages 187-198

[Evans et al., 2015]. Transient thermal finite element analysis of CFC-Cu ITER monoblock using X-ray tomography data. Fusion Engineering and Design, 100, 100-111.

[Giudice et al., 2020] An Image Registration-Based Morphing Technique for Generating Subject-Specific Brain Finite Element Models. Annals of Biomedical Engineering, 48(10), 2412-2424

[Gleeson, 2017] Escaping the Curse of Dimensionality [Online Courses]. Free Code Camp.

[Guedou, 2014] Des matériaux incontournables pour les turboréacteurs aéronautiques : les superalliages base nickel, J.Y. Guedou, 2014

[Hairy, 2018] *La solidification des alliages métalliques*. CTIF – Metalblog

[Henneron et al., 2019] *Mesh Deformation Based on Radial Basis Function Interpolation Applied to Low-Frequency Electromagnetic Problem*. *IEEE Transactions on Magnetics*

[Horsin-Molinaro et al., 2014] *La tomographie en sciences et mécanique des matériaux : voyage aux centres des matériaux*

[LeBlanc, 2016] *Étude aérodynamique d'un jet turbulent impactant une paroi concave*, Benoît LeBlanc, Master Thesis, Université de Moncton, 2016

[Levoy et al., 2000] *The Digital Michelangelo Project : 3D Scanning of Large Statues*. 14.

[Levy, 2006] *Laplace-Beltrami Eigenfunctions Towards an Algorithm That « Understands » Geometry*. *IEEE International Conference on Shape Modeling and Applications 2006*

[Mocanu, 2012] *3D mesh morphing [Institut National des Télécommunications]*.

[Reuter, 2013] *Spectral Shape Analysis with Applications in Medical Imaging*. *SIAM Annual Meeting 2013, San Diego*.

[Reuter et al., 2006] *Laplace–Beltrami spectra as ‘Shape-DNA’ of surfaces and solids*. *Computer-Aided Design*, 38(4), 342-366.

[Shapiro and Brady, 1992] *Feature-based correspondence : An eigenvector approach*. *Image and Vision Computing*, 10(5), 283-288.

[Shontz et al., 2011] *Analysis of and workarounds for element reversal for a finite element-based algorithm for warping triangular and tetrahedral meshes*, S. Shontz, S. Vavasis

[Tinga et al., 2009] *Cube slip and non-Schmid effects in single crystal Ni-base superalloys*. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*.

[Wahl et al., 2018] *Improved 3rd Generation Single Crystal Superalloy CMSX-4® Plus (SLS) – a study of evolutionary alloy development*. 14.

[Zhao and Li, 2005] *A 3D image processing method for manufacturing process automation*. *Computers in Industry*, 56(8-9), 975-985.

[Zhang et al., 2010] *Spectral Mesh Processing*, 2010, H. Zhang, O. Van Kaick, R. Dyer

Annexe – Matériau – Générations

Gén.	SX	Cr	Co	Mo	W	Al	Ti	Ta	Nb	Hf	Re	Ru	C	Den
1 ^{ère}	MAR-M200+Hf	8.0	9.0		12	5.0	1.9		1.0	1.5			0.15	8.60
	AM1	7.8	6.5	2.0	5.7	5.2	1.1	7.9						8.60
	CMSX-2	8.0	4.6	0.6	8.0	5.6	1.0	6.0						8.60
	PWA1480	10	5		4	5.0	1.5	12						8.70
	SRR99	8.0	5.0		10.0	5.5	2.2	3.0						8.56
	MC2	8.0	5.0	2.0	8.0	5.0	1.5	6.0						8.63
	CMSX-4	6.5	9.0	0.6	6.0	5.6	1.0	6.35			0.1	3.0		
2 ^{ème}	PWA1484	5.0	10.0	2.0	6.0	5.6		8.7		0.1	3.0			8.95
	René N5	7.0	8.0	2.0	5.0	6.2		7.0		0.2	3.0			8.70
2 ^{ème} – 3 ^{ème}	CMSX-4 Plus	3.5	10.0	0.6	6.0	5.7	0.85	8.0		0.1	4.8			8.93

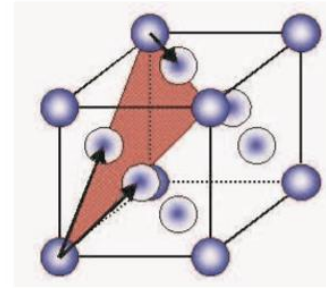
Gén.	SX	Cr	Co	Mo	W	Al	Ti	Ta	Nb	Hf	Re	Ru	C	Den
3 ^{ème}	CMSX-10K	2.0	3.0	0.4	5.0	5.7	0.2	8.0	0.1	0.03	6.0			9.05
	René N6	4.2	12.5	1.4	6.0	5.75		7.2		0.15	5.4		0.05	8.97
4 ^{ème}	MC-NG	4.0	<0.2	1	5.0	6.0	0.5	5.0		0.10	4.0	4.0		8.75
	TMS-138A	2.8	5.8	2.9	6.1	5.8		5.6		0.05	5.1	1.9		8.95

Annexe – Matériau – Composition

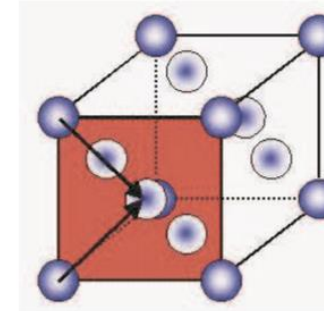
Elément chimique	Localisation préférentielle	Effets
Nickel (Ni)	Matrice	
Aluminium (Al)	Précipités	- Formation de la phase γ' - Protection oxydation par la formation d'une couche en surface de Al_2O_3
Titane (Ti)	Précipités	- Stabilisation de γ' par substitution Al
Chrome (Cr)	Matrice	- Durcissement matrice par solution solide - Protection corrosion par la formation d'une couche en surface de Cr_2O_3
Cobalt (Co)	Matrice	- Durcissement matrice par substitution Ni
Molybdène (Mo)	Matrice	- Durcissement matrice par solution solide
Tungstène (W)	Matrice/Précipités	- Durcissement matrice par solution solide
Niobium (Nb)		- Formation carbures
Hafnium (Hf)	X	- Stabilisation de γ' - Meilleure coulabilité - Formation carbures - En faible quantité, diminution de la vitesse de formation des oxydes - Meilleure adhérence du revêtement
Carbone (C)	X	- Formation carbures et borures
Bore (Br)		- Facilite élaboration lingots - Meilleure tenue mécanique des Low-Angle Boundaries
Tantale (Ta)	Précipités	- Meilleure coulabilité - Diminution défauts type « freckles » - Formation carbures - Stabilisation de γ' par substitution Al - Augmentation de la température de solvus des précipités - Augmentation de la résistance au cisaillement des précipités
Rhénium (Re)	Matrice	- Durcissement matrice par solution solide - Ralentissement de la coalescence de γ'
Ruthénium (Ru)	Matrice/Précipités	- Limite formation phases TCP

Superalliages monocristallins à base de nickel : alliages à applications « haute température » ~ 1100°C

Famille de systèmes	Systèmes s	Plan de glissement n^s	Direction de glissement l^s
octaédrique	1	(111)	$\bar{1}01$
	2		$0\bar{1}1$
	3		110
	4	$(\bar{1}\bar{1}1)$	101
	5		$0\bar{1}1$
	6		110
	7	$(\bar{1}1\bar{1})$	$0\bar{1}1$
	8		110
	9		101
	10	$(11\bar{1})$	110
	11		101
	12		$0\bar{1}1$
cubique	13	(001)	$\bar{1}10$
	14		110
	15	(100)	$0\bar{1}1$
	16		$0\bar{1}1$
	17	(010)	101
	18		101



(a)



(b)

Classement des systèmes de glissement typique d'une structure CFC et illustration [Kaminski, 2007]

Modélisation :

Déformation totale

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}^e + \tilde{\varepsilon}^p$$

Partie inélastique

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}^p = \sum_{s=1}^{12} \tilde{m}^s \dot{\gamma}^s + \sum_{s'=1}^6 \tilde{m}^{s'} \dot{\gamma}^{s'}$$

Ecrouissage

$$\dot{\gamma}^s = \left\langle \frac{|\tau^s - x^s| - r^s}{k} \right\rangle^n \text{sign}(\tau^s - x^s)$$

Superaliages monocristallins à base de nickel

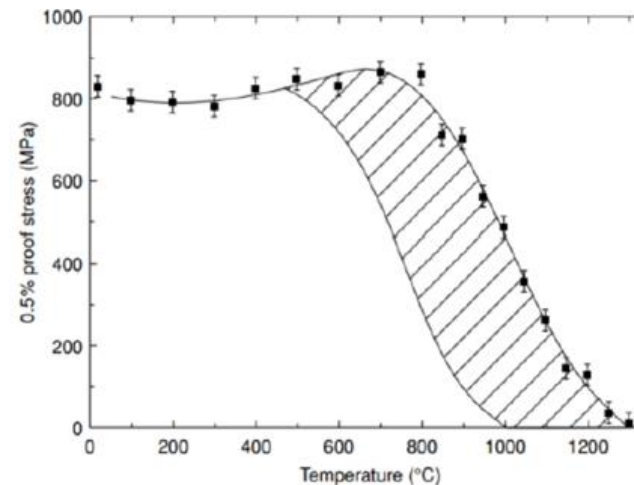
➤ Loi de comportement élastique cubique:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & & & \\ & C_{11} & C_{12} & & & \\ & & C_{11} & & & 0 \\ & & & C_{44} & & \\ & \text{Sym.} & & & C_{44} & \\ & & & & & C_{44} \end{bmatrix}$$

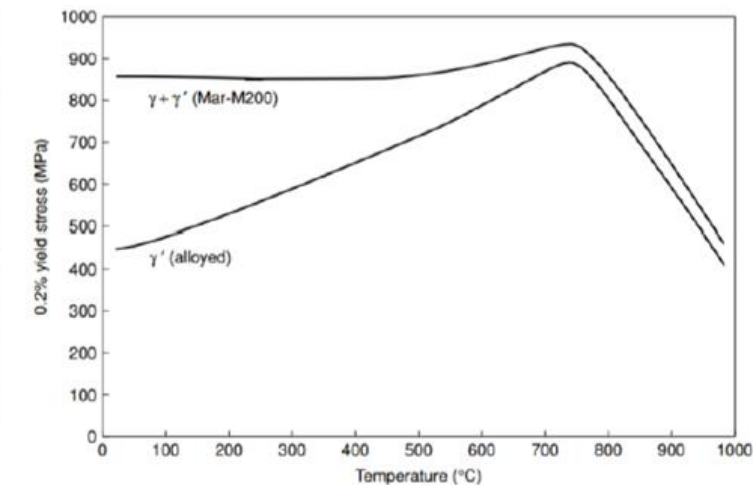
T (°C)	C_{1111} (GPa)	C_{1122} (GPa)	C_{1212} (GPa)
20	273.6	182.4	123.7
550	239.4	159.6	121.3
700	231.4	154.3	117.6
800	223.9	149.3	114.6
850	215.4	143.6	112.1
900	207.6	138.4	111.5
950	204.4	136.3	107.9

Evolution des termes du tenseur de rigidité avec la température pour le CMSX-4 [Tinga et al., 2009]

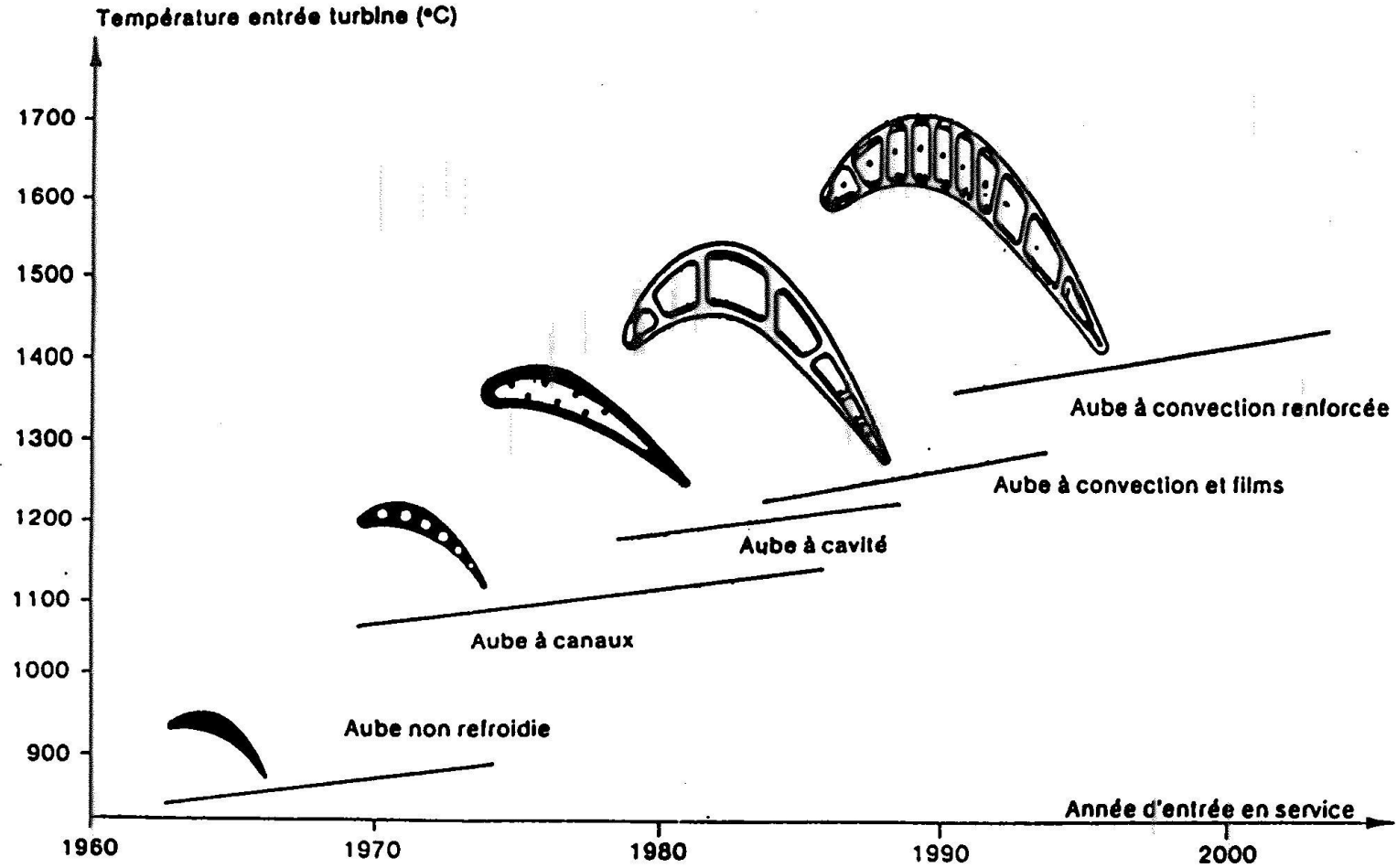
➤ Comportement mécanique:



Evolution du module d'élasticité à 0,5% selon $\langle 001 \rangle$ en fonction de la température et comparaison avec des superalliages de génération précédente à 0,2% [Reed, 2008]



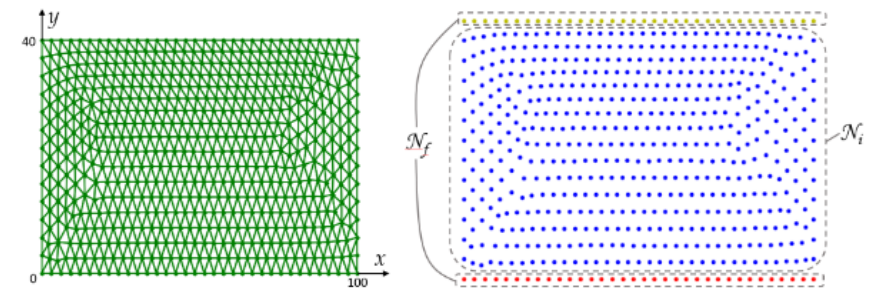
Annexe – Géométrie aubes turbine



Déformation de maillages – Méthode à déplacement connu

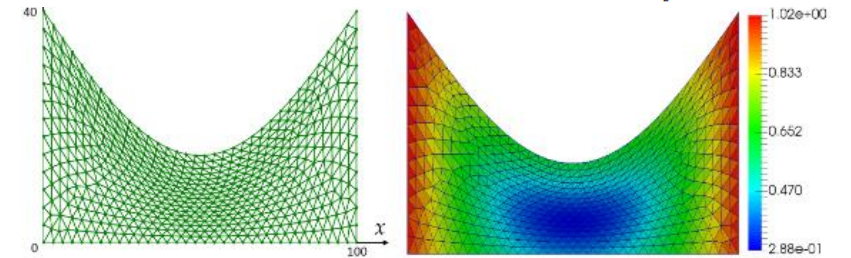
- Interpolation du déplacement par Radial Basis Function (RBF)
 - **Conditions d'application** : Identification des nœuds:
 - **Frontières**, à déplacement **connu** entre les maillages *Source* et *Target*
 - **Intérieurs**, à déplacement inconnu
 - Déplacement d'un nœud **intérieur** défini par sa distance aux nœuds **frontières**

$$d_y = \begin{cases} 0 & \text{if } y = 0 \\ -25\cos(\pi/100x) & \text{if } y = 40 \end{cases}$$



(a) mesh of the domain

(b) definition of \mathcal{N}_f and \mathcal{N}_i



(a) deformed mesh

(b) distribution of the deformation indicator

Déformation de maillage par utilisation de RBF [Henneron et al., 2019]

Name	$\phi(\mathbf{x})$
Gaussian	$e^{-(\mathbf{x}/a)^2}$
Multiquadric	$\sqrt{1 + (\mathbf{x}/a)^2}$
Inverse quadric	$\sqrt{\frac{1}{1 + (\mathbf{x}/a)^2}}$
Thin plate spline	$\mathbf{x}^2 \log(\mathbf{x})$

$$f(\mathbf{x}) \approx s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_t} \alpha_i \phi_i(\mathbf{x})$$

with $\phi_i(\mathbf{x}) = \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|)$

Exemples de RBF et approximation du déplacement [Henneron et al., 2019]